Rieman toplamları

$[a,b]$ kapalı aralığı için $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ olmak üzere $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ kümesine $[a,b]$ nin bir bölünüşü denir. P bölünüşü $[a,b]$ yi n tane altaralığa böler: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Buna göre;

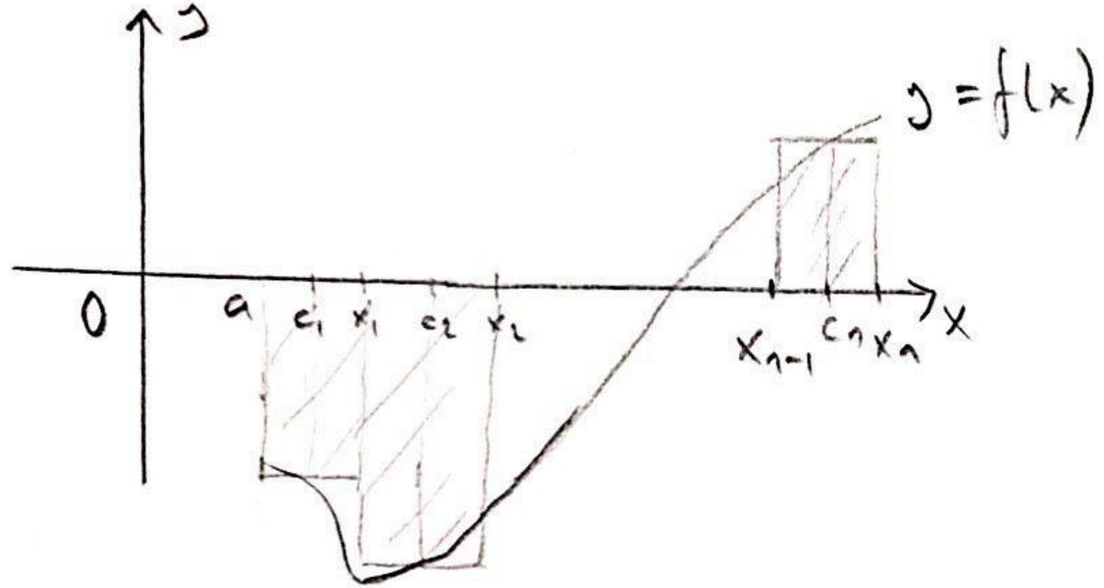
k. alt aralık $[x_{k-1}, x_k]$ ve bu aralığın uzunluğu

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dir.

Şimdi her bir alt aralıktan bir $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ noktası seçelim.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

toplamına f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki Rieman toplamı denir.



$$\|P\| = \text{maks}\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$$

sayısına $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bölünüşünün normu denir. Yani, P bölünüşünün normu alt aralıkların uzunluklarının en büyüğüdür.

Tanım: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $[a,b]$ aralığının bir bölünüşü, $c_k\in[x_{k-1}, x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$ olmak üzere

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

Rieman toplamının limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde belirli integrali denir ve $\int_a^b f(x)\,dx$ ile gösterilir.

Burada a ve b ye, sırasıyla, integralin alt ve üst sınırı denir.

Teorem: Sürekli bir fonksiyon integrallenebilirdir. Yani, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise $\int_a^b f(x)dx$ mevcuttur.

Belirli integralin özellikleri

f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirse aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3) $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, ($k$ sabit)

4) $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

5) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

6) $f_{min} \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f_{max} \cdot (b-a)$

7) Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ dır.

7. özelliğin bir sonucu olarak $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dır.

Örnek: $\int_{-1}^1 f(x)dx = 5$, $\int_1^4 f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^1 g(x)dx = 7$ ise

$\int_4^1 f(x)dx = -\int_1^4 f(x)dx = 2$, $\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = 5-2=3$

$\int_{-1}^1 (f(x)+2g(x))dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + 2\int_{-1}^1 g(x)dx = 5+2\cdot 7 = 19$

Örnek: $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\, dx \leq \sqrt{2}$ olduğunu gösterelim:

$f(x)=\sqrt{1+\cos x}$ in $[0,1]$ üzerinde maksimum değeri

$f(0)=\sqrt{2}$ olup

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\, dx \leq f_{maks}\cdot(1-0)=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$$

dir.

$[a,b]$ de integrallenebilen bir f fonksiyonu her $x\in[a,b]$ için $[a,x]$ üzerinde de integrallenebilir. Böylece

$$F:[a,b]\to\mathbb{R},\quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

biçiminde integral ile tanımlı fonksiyondan söz edilebilir. Bu integral $x\in[a,b]$ olmak üzere x değişkeninin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun türevi şu teorem ile verilir:

Teorem(İntegral Hesabın Birinci Teoremi):

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda F fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$F'(x)=f(x)$$

dir.

Teorem(İntegralin türevi - Leibniz Teoremi):

u ve v fonksiyonları $[a,b]$ de türevlenebilir fonksiyonlar, f ise $[a,b]$ de integrallenebilir olsun. Bu durumda $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$F'(x)=f(v(x))\,v'(x)-f(u(x))\,u'(x)$$

dir.

Örnek: $F(x)=\int_{x}^{x^2} \sin t^2\,dt \Rightarrow F'(x)=\sin(x^2)^2(x^2)' - \sin x^2 (x)' = 2x\sin x^4 - \sin x^2$

Örnek: $L=\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt}{x^2} = ?$

$\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği vardır. L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt}{\frac{dx^2}{dx}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{\cancel{2}}}{x^4+1}-0}{2\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2(x^4+1)}=0.$$

Teorem (integral hesabın ikinci temel teoremi):

f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve F ise f nin bir ters türevi (ilkeli) ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$$

d...

Örnek: $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

Teorem (Belirli integraller için ortalama değer teoremi):

f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ise en az bir $c \in [a,b]$ için

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

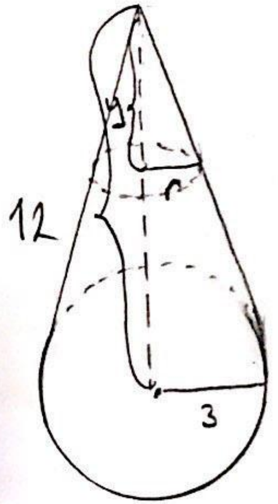
dir.

Teoremde geçen $f(c)$ sayısına f fonksiyonunun $[a,b]$ deki ortalama değeri denir.

Örnek: $f(x) = 3 - \cos x$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ deki ortalama değerini bulalım.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3-\cos x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(3x - \sin x)\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{2\pi}(3\pi - \sin\pi + 3\pi + \sin\pi) = 3$$

Örnek: Taban yarıçapı 3 br., yüksekliği 12 br. olan bir dairesel dik koni tepesinden y br. uzakta tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değerini bulalım:



$$\frac{y}{12}=\frac{r}{3} \Rightarrow r=\frac{y}{4}, \quad y\in[0,12]$$

$\Rightarrow$ Dairesel kesitin alanı $= \pi r^2 = \dfrac{\pi y^2}{16}$

$\Rightarrow$ Dairesel kesitin alanının ortalama değeri

$$\frac{1}{12}\int_0^{12}\frac{\pi y^2}{16}\,dy = \frac{1}{12.16}\,\frac{\pi y^3}{3}\Bigg|_{y=0}^{y=12} = \frac{\pi.12^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{12}.16.3} = \frac{\pi.\cancel{12}^{\,3}.\cancel{12}^{\,4}}{\cancel{16}_{\,4}.\cancel{3}} = 3\pi$$

Teorem (Değişken değiştirme): g fonksiyonu [a,b] de türevlenebilir, f ise bu aralıkta integrallenebilir olsun. g(x)=u için

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

dur.

Örnek: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = ?$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad u=g(x)=\sin x \implies f(g(x))=\frac{1}{1+\sin^2 x}, \quad g'(x)=\cos x$$

$$g(0)=\sin 0=0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\implies I=\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u\Big|_{u=0}^{u=1} = \arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$$

Not: Belirli integral değişken değiştirme yöntemi ile hesaplanacak ise integralin sınırları da değiştirilmelidir. Başka bir yol ise, önce belirsiz integral hesaplanıp eski değişkene dönülerek belirli integrali hesaplamaktır.

Teorem (Kısmi integrasyon):

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Örnek: $I = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = ?$

$x = u$, $\cos x\,dx = dv \Rightarrow dx = du$, $v = \sin x$

$$I = x\sin x\Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \pi\cancelto{0}{\sin\pi} - 0.\cancelto{0}{\sin 0} - (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \cos\pi - \cos 0 = -1-1 = -2.$$